Iteracyjne rozwiązywanie równań

Michał Goliński

Elementy metod numerycznych

Plan wykładu

Plan wykładu

Plan wykładu

Plan wykładu

Poznamy iteracyjne metody rozwiązywania równań w rodzaju

$$f(x) = 0.$$

Zauważmy, ze nawet najprostsze równania tego rodzaju moga nie mieć rozwiązań dających się reprezentować w postaci zmiennoprzecinkowej (np. $x^2 - 2 = 0$). Dlatego zależy nam na metodach znajdujących przybliżenie rozwiązania. Wyjściem każdej z poznanych metod będzie ciąg liczb x_n, który (mamy nadzieję) bedzie ciągiem coraz lepszych przybliżeń rozwiązania badanego równania.

Rząd zbieżności

Definicja

Niech $x_n \to x_0$. Rząd zbieżności ciągu x_n to supremum zbioru liczb α, dla których istnieje stała dodatnia C taka, że:

$$|x_{n+1} - x_0| \leq C|x_n - x_0|^\alpha.$$

Uwaga

Im większy rząd zbiezności, tym szybciej ciąg dąży do swojej granicy.

Rząd zbieżności

Definicja

Niech $x_n \to x_0$. Rząd zbieżności ciągu x_n to supremum zbioru liczb α, dla których istnieje stała dodatnia C taka, że:

$$|x_{n+1} - x_0| \leq C|x_n - x_0|^{\alpha}.$$

Uwaga

Im większy rząd zbiezności, tym szybciej ciąg dąży do swojej granicy.
Powyższe supremum może nie być osiągane.

Zbieżność liniowa

Gdy rząd zbieżności jest równy 1, mówimy o *zbieżności liniowej*.

Zbieżność liniowa

Gdy rząd zbieżności jest równy 1, mówimy o *zbieżności liniowej*.
Dla przykładu, gdy $x_n = q^n$ dla $|q| < 1$, to $\lim x_n = 0$ i

$$|x_{n+1}| \leq |x_n|,$$

więc ciąg geometryczny jest zbieżny liniowo do zera.

Zbieżność liniowa – cyfry

Poniżej mamy rozwinięcia dziesiętne kolejnych elementów ciągu $x_n = 1/7^n$:

0,142857142857142857142
0,020408163265306122448
0,002915451895043731778
0,000416493127863390254
0,000059499018266198607
0,000008499859752314086
0,000001214265678902012
0,000000173466525557430
0,000000024780932222490
0,000000003540133174641
0,000000000505733310663
0,000000000072247615809
0,000000000010321087973
0,000000000001474441139
0,000000000000210634448
0,000000000000030090635
0,000000000000004298662
0,000000000000000614094

Zauważmy, że liczba poprawnych cyfr przybliżenia rośnie mniej

Zbieżność kwadratowa

Gdy rząd zbieżności jest równy 2, mówimy o **zbieżności kwadratowej**

Zbieżność kwadratowa

Gdy rząd zbieżności jest równy 2, mówimy o **zbieżności kwadratowej**
Dla przykładu, gdy $x_n = nq^{n^2}$, to rząd zbieżności wynosi 2 (to przykład na to, że supremum w definicji rzed zbiezności nie musi być osiągane).

Zbieżność kwadratowa – cyfry

Poniżej mamy rozwinięcia dziesiętne kolejnych elementów ciągu $x_n = n/1{,}5^{n^2}$:

```
0,666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
0,395061728395061728395061728395061728395061728395061728395061
0,078036884621246761164456637707666514250876390794086267337296
0,006089755361389779258680353376973823395282534992618833847995
0,000198010640211830448892720934881026620585318416667990329864
0,000002747045952709300813441666918229555243670389793805444261
0,000000016467449727581565534503667884838435696848007203891494
0,000000000042978317257267070839581116467149597300980326539923
0,000000000000049073894613928690780119838549220439032691595954
0,000000000000000024596544265798292692437939959390953980172032
0,000000000000000000005424382915085985288042359397937083569965
0,000000000000000000000000527278352941779252439674603612037675
0,000000000000000000000000000022621456917765593920364187005600
0,000000000000000000000000000000000428786655284481941463841142
0,000000000000000000000000000000000000003593833656176496125537
0,000000000000000000000000000000000000000000013327775369878652
0,000000000000000000000000000000000000000000000000021881397431
0,000000000000000000000000000000000000000000000000000000015911
```

Zauważmy, że liczba poprawnych cyfr przybliżenia rośnie mniej więcej kwadratowo.

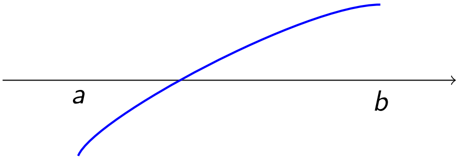
Poznamy 3 tradycyjne metody (przybliżonego) rozwiązywania równania

$$f(x) = 0.$$

Będziemy zakładali, że funkcja f jest ciągła.

Metoda bisekcji

Punktem startowym metody bisekcji jest para punktów a i b taka, że wartości funkcji $f(a)$ i $f(b)$ mają różne znaki. Z własności Darboux wynika, że $f(\xi) = 0$ dla pewnego $\xi \in (a, b)$:



Metoda bisekcji – algorytm

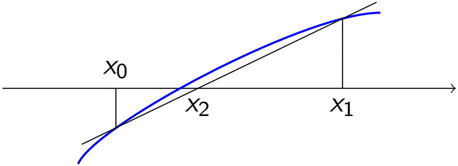
1. Znajdujemy środek c przedziału (a, b) zawierającego pierwiastek.
2. Obliczamy wartość $f(c)$.
3. Zastępujemy jeżeli znak $f(a)$ jest taki sam jak znak $f(c)$, to zastępujemy a przez c. W przeciwnym przypadku zastępujemy b przez c.
4. Powtarzmy tę procedurę tak długo, aż osiągniemy pożądaną dokładność.

Metoda bisekcji – analiza

- Zalety
  - Metoda jest bardzo prosta i odporna na pojawiające się problemy.
  - W każdym kroku na pewno zwiększymy dokładność przybliżenia.
- Wady
  - Metoda jest stosunkowo wolno zbieżna: tylko zbieżność liniowa.

Metoda siecznych

Na starcie may dane dwa różne punkty x_0 i x_1. Kolejnym przybliżeniem rozwiązania będzie miejsce zerowe prostej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$.



Równanie siecznej:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$

Stąd, biorąc $y = 0$ dostajemy:

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

Metoda siecznych – algorytm

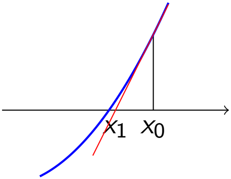
1. Znajdujemy prostą przechodzącą przez punkty $(x_n, f(x_n))$ i $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$.
2. Definiujemy x_{n+2} jako miejsce zerowe otrzymanej prostej.
3. Powtarzmy tę procedurę tak długo, aż wartość $f(x_n)$ będzie wystarczająca mała lub zajdzie inne kryterium stopu.

Metoda siecznych – analiza

- Zalety
  - Metoda jest szybsza od metody bisekcji, zbieżność jest szybsza niż liniowa, chociaż wolniejsza niż kwadratowa. Można pokazać, że rząd zbieżności wynosi $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
  - Metoda ta jest w pewnym sensie najbardziej ekonomiczna.
- Wady
  - Metoda nie zawsze działa – można podać przykłady, w których otrzymany ciąg nie będzie zbieżny do istniejącego rozwiązania. Punkty startowe powinny być blisko rozwiązania.

Metoda stycznych (Newtona-Raphsona)

Na starcie may dany punkt x_0. Kolejnym przybliżeniem rozwiązania będzie miejsce zerowe stycznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$.



Równanie stycznej:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Stąd, biorąc $y = 0$ dostajemy:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Metoda stycznych – algorytm

1. Znajdujemy prostą przechodzącą przez punkt $(x_n, f(x_n))$.
2. Definiujemy x_{n+1} jako miejsce zerowe otrzymanej prostej.
3. Powtarzmy tę procedurę tak długo, aż osiągniemy pożądaną dokładność lub zajdzie inne kryterium stopu.

Metoda stycznych – analiza

- Zalety
  - Metoda jest szybsza zarówno od metody bisekcji jak i od metody siecznych, zbieżność jest kwadratowa (o ile pierwiastek jest pojedynczy).
  - Metoda jest bardzo dobra, jeżeli jesteśmy w stanie dla konkretnej funkcji f uprościc wzór rekurencyjny i uniknąc obliczania $f(x_n)$ i $f'(x_n)$.
- Wady
  - Metoda nie zawsze działa – można podać przykłady, w których otrzymany ciąg nie będzie zbieżny do rozwiązania. Punkty startowy powinien być blisko rozwiązania.
  - Musimy być w stanie obliczyć pochodną – to nie zawsze jest proste.

Kontrakcja

Definicja

Funkcję między przestrzeniami metrycznymi $f : X \to Y$ nazywamy kontrakcją (odwzorowaniem zwężającym) jeśli istnieje liczba $\lambda \in [0, 1)$ taka, że

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

Twierdzenie Banacha o kontrakcji

Twierdzenie

Niech $f : X \to X$ będzie kontrakcją, gdzie X jest zupełną przestrzenią metryczną (np. $X = [a, b]$ lub $X = \mathbb{R}$). Wtedy istnieje dokładnie jeden punkt stały $s \in X$ dla f, to znaczy punkt taki, że

$$f(s) = s.$$

Co więcej, jeśli $x_0 \in X$ jest dowolnym punktem i $x_{n+1} = f(x_n)$, to $\lim x_n = s$.