Interpolacja i aproksymacja

Michał Goliński

Elementy metod numerycznych

Plan wykładu

Plan wykładu

Zagadnienie interpolacyjne Lagrange'a

Sformułowanie problemu

Dane są:

- $n+1$ różnych punktów (tzw. węzły interpolacji): $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- $n+1$ liczb: $y_0, y_1, \ldots, y_n$

Zagadnienie interpolacyjne Lagrange'a

Sformułowanie problemu

Dane są:

- $n+1$ różnych punktów (tzw. węzły interpolacji): $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- $n+1$ liczb: $y_0, y_1, \ldots, y_n$

Zadanie:

- Znaleźć wielomian L stopnia co najwyżej n taki, że

$$L(x_i) = y_i.$$

Zagadnienie interpolacyjne Lagrange'a

Sformułowanie problemu

Dane są:

- $n+1$ różnych punktów (tzw. węzły interpolacji): $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- funkcja f

Zadanie:

- Znaleźć wielomian L stopnia co najwyżej n taki, że

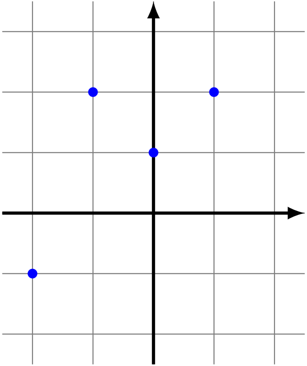
$$L(x_i) = f(x_i).$$

Przykład

x	-2	-1	0	1
y	-1	2	1	2

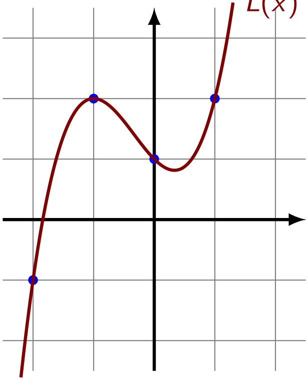
Przykład

x	-2	-1	0	1
y	-1	2	1	2



Przykład

x	-2	-1	0	1
y	-1	2	1	2



Fakt

Zagadnienie Lagrange'a ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Fakt

Zagadnienie Lagrange'a ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód.

Przypuśćmy, że wielomiany L i $\widetilde{L}$ są rozwiązaniami zagadnienia Lagrange'a, tzn. są stopnia co najwyżej n oraz

$$L(x_i) = y_i = \widetilde{L}(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Fakt

Zagadnienie Lagrange'a ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód.

Przypuśćmy, że wielomiany L i $\widetilde{L}$ są rozwiązaniami zagadnienia Lagrange'a, tzn. są stopnia co najwyżej n oraz

$$L(x_i) = y_i = \widetilde{L}(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Zatem $P = L - \widetilde{L}$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n i

$$P(x_i) = L(x_i) - \widetilde{L}(x_i) = 0 \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Fakt

Zagadnienie Lagrange'a ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód.

Przypuśćmy, że wielomiany L i $\widetilde{L}$ są rozwiązaniami zagadnienia Lagrange'a, tzn. są stopnia co najwyżej n oraz

$$L(x_i) = y_i = \widetilde{L}(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Zatem $P = L - \widetilde{L}$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n i

$$P(x_i) = L(x_i) - \widetilde{L}(x_i) = 0 \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Czyli P ma co najmniej $n+1$ pierwiastków. Zatem musi być $P \equiv 0$. Stąd $L = \widetilde{L}$. □

Fakt

Zagadnienie Lagrange'a ma rozwiązanie.

Fakt

Zagadnienie Lagrange'a ma rozwiązanie.

Dowód

Zauważmy, że wielomian $P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ma pierwiastki w $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Fakt

Zagadnienie Lagrange'a ma rozwiązanie.

Dowód

Zauważmy, że wielomian $P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ma pierwiastki w $x_1, x_2, \dots, x_n$. Stąd wielomian

$$l_0(x) = \frac{P_0(x)}{P_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

spełnia

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_i) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Dowód cd.

Analogicznie wielomian

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots\widehat{(x - x_j)}\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots\widehat{(x_j - x_j)}\dots(x_j - x_n)}$$

spełnia

$$\begin{cases} l_j(x_j) = 1 \\ l_j(x_i) = 0 \quad \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Dowód cd.

Analogicznie wielomian

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots\widehat{(x-x_j)}\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots\widehat{(x_j-x_j)}\dots(x_j-x_n)}$$

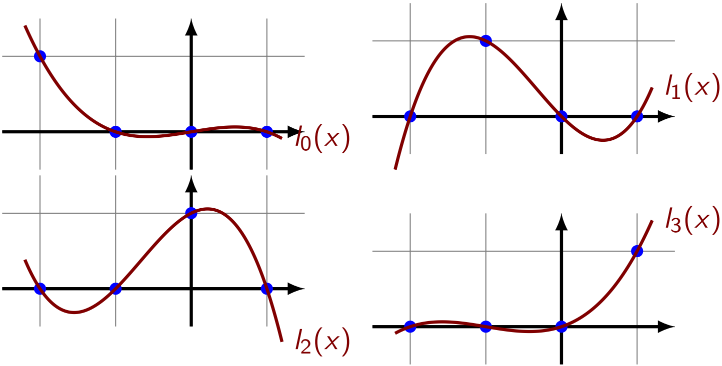
spełnia

$$\begin{cases} l_j(x_j) = 1 \\ l_j(x_i) = 0 \quad \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Zatem $L = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j$ jest rozwiązaniem zagadnienia Lagrange'a. Istotnie:

$$L(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x_i) = y_i l_i(x_i) = y_i. \quad \square$$

Przykład dla postaci Lagrange'a



$$L(x) = -l_0(x) + 2l_1(x) + l_2(x) + 2l_3(x)$$

Niestety, w praktyce interesuje nas obliczanie wartości wielomiany interpolacyjnego poza podanymi węzłami, powyższy sposób jest do tego bardzo niepraktyczny. Ponadto dodanie kolejnego węzła spowoduje koniecznośc powtórzenia wszystkich obliczeń.

Niestety, w praktyce interesuje nas obliczanie wartości wielomiany interpolacyjnego poza podanymi węzłami, powyższy sposób jest do tego bardzo niepraktyczny. Ponadto dodanie kolejnego węzła spowoduje koniecznośc powtórzenia wszystkich obliczeń. Zauważmy, że w isocie znaleźliśmy przedstawienie pewnego wielomianu (wyznaczonego przez swe wartości) w pewnej specjalnej bazie przestrzeni liniowej wielomianów stopnia co najwyżej n. Bazę tę moglibyśmy nazwać bazą Lagrange'a, a postać wielomianu – postacią Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego. Możemy spróbować znaleźć przedstawienie tego wielomianu w innej bazie.

Każdy wielomian stopnia co najwyżej n ma przedstawienie w postaci naturalnego rozwinięcia:

$$L(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n.$$

Każdy wielomian stopnia co najwyżej n ma przedstawienie w postaci naturalnego rozwinięcia:

$$L(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n.$$

Warunki na wielomian interpolacyjny prowadzą do układu $n+1$ równań o $n+1$ niewiadomych:

$$\begin{cases} y_0 = L(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \ldots + c_n x_0^n \\ y_1 = L(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n \\ \vdots \\ y_n = L(x_n) = c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \ldots + c_n x_n^n. \end{cases}$$

Zauważmy, że ze względu na poszukiwane współczynniki $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są to równania liniowe. W notacji macierzowej:

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n)^T = V(x_0, x_1, \ldots, x_n)(c_0, c_1, \ldots, c_n)^T,$$

gdzie

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

to tzw. macierz Vandermone'a. Macierz ta jest nieosobliwa (o ile węzły są różne), więc możemy obliczyć poszukiwane współczynniki:

$$(c_0, c_1, \ldots, c_n)^T = V(x_0, x_1, \ldots, x_n)^{-1}(y_0, y_1, \ldots, y_n)^T,$$

Przykład dla postaci naturalnej

x	-2	-1	0	1
y	-1	2	1	2

Przykład dla postaci naturalnej

x	-2	-1	0	1
y	-1	2	1	2

Obliczamy współczynniki:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & -1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przykład dla postaci naturalnej

x	-2	-1	0	1
y	-1	2	1	2

Obliczamy współczynniki:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & -1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zatem $L(x) = 1 - x + x^2 + x^3$.

Niestety macierz Vandermonde'a ma bardzo złe własności numeryczne, więc obliczenia maszynowe współczynników wielomianu interpolacyjnego w bazie naturalnej obarczone są dużym błędem.

Niestety macierz Vandermonde'a ma bardzo złe własności numeryczne, więc obliczenia maszynowe współczynników wielomianu interpolacyjnego w bazie naturalnej obarczone są dużym błędem.Podsumowując:

- baza Lagrange'a
  - trudno obliczyć wartośc w konkretnym punkcie
  - łatwo napisać wielomian interpolacyjny
- baza naturalna
  - łatwo obliczyć wartość w punkcie (schemat Hornera)
  - trudno obliczyć współczynniki wielomianu (macierz źle uwarunkowana)

Kompromisem jest baza Newtona:

- łatwo obliczyć wartość wielomianu w punkcie (wariant schematu Hornera)
- stosunkowo łatwo obliczyć potrzebne współczynniki
- ponadto, dodanie kolejnych węzłów nie wymaga powtarzania wszystkich obliczeń

Algorytm Neville'a

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a $L(x)$ możemy zapisać w tzw. postaci Newtona $L(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x)$, gdzie

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1, \\
p_1(x) &= (x - x_0), \\
p_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\
&\dots \\
p_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \\
b_i &= f[x_0, \dots, x_i],
\end{aligned}$$

gdzie z kolei $f[x_0, \dots, x_i]$ to tzw. ilorazy różnicowe (lub: różnice dzielone) dane rekurencyjną zależnością:

$$f[x_i] = f(x_i) = y_i,$$

$$f[x_l, \dots, x_{l+k}] = \frac{f[x_{l+1}, \dots, x_{l+k}] - f[x_l, \dots, x_{l+k-1}]}{x_{l+k} - x_l}.$$

Tablica ilorazów różnicowych

Wartości ilorazów różnicowych z reguły zapisujemy w postaci wygodnej do obliczeń trójkątnej tablicy, np:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & \color{red}{f[x_0]} & & & & \\
 & & \color{red}{f[x_0,x_1]} & & & \\
x_1 & f[x_1] & & \color{red}{f[x_0,x_1,x_2]} & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & \color{red}{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & & \color{red}{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]} \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f[x_3] & & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
 & & f[x_3,x_4] & & & \\
x_4 & f[x_4] & & & &
\end{array}
$$

Wyróznione wartości to poszukiwane współczynniki w postaci Newtona.

Przykład

$$\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

Przykład

$$
\begin{array}{ccc}
-2 & -1 & \\
 & & 3 \\
-1 & 2 & \\
 & & -1 \\
0 & 1 & \\
 & & 1 \\
1 & 2 &
\end{array}
$$

Przykład

$$
\begin{array}{cccc}
-2 & -1 & & \\
 & & 3 & \\
-1 & 2 & & -2 \\
 & & -1 & \\
0 & 1 & & 1 \\
 & & 1 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

Przykład

$$
\begin{array}{ccccc}
-2 & -1 & & & \\
 & & 3 & & \\
-1 & 2 & & -2 & \\
 & & -1 & & 1 \\
0 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & \\
1 & 2 & & &
\end{array}
$$

Przykład

$$
\begin{array}{ccccc}
-2 & -1 & & & \\
 & & 3 & & \\
-1 & 2 & & -2 & \\
 & & -1 & & 1 \\
0 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & \\
1 & 2 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L(x) &= -1 + 3(x+2) - 2(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x \\
&= -1 + (x+2)\left[3 + (x+1)(-2+x)\right]
\end{aligned}
$$

Zagadnienie interpolacyjne Hermite'a

Dane są:

- różne punkty (węzły interpolacji): $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- nieujemne liczby całkowite: $k_0, k_1, \ldots, k_n$
- $n + k_0 + k_1 + \ldots + k_n$ liczb:

$$\begin{array}{cccc} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,k_0} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,k_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n,0} & y_{n,1} & \cdots & y_{n,k_n} \end{array}$$

Zagadnienie interpolacyjne Hermite'a c.d.

Problem:

- Znaleźć wielomian $H(x)$ stopnia co najwyżej $k_0 + k_1 + \ldots + k_n + n - 1$ taki, że:

$$\begin{array}{cccc} H(x_0) = y_{0,0} & H'(x_0) = y_{0,1} & \ldots & H^{(k_0)}(x_0) = y_{0,k_0} \\ H(x_1) = y_{1,0} & H'(x_1) = y_{1,1} & \ldots & H^{(k_1)}(x_1) = y_{1,k_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H(x_n) = y_{n,0} & H'(x_n) = y_{n,1} & \ldots & H^{(k_n)}(x_0) = y_{n,k_n}. \end{array}$$

Zagadnienie interpolacyjne Hermite'a cd.

Dane są:

- różne punkty (węzły interpolacji): $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- nieujemne liczby całkowite: $k_0, k_1, \ldots, k_n$
- odpowiednio wiele razy różniczkowalna w odpowiednich punktach funkcja f

Problem:

- Znaleźć wielomian $H(x)$ stopnia co najwyżej $k_0 + k_1 + \ldots + k_n + n - 1$ taki, że:

$$\begin{array}{cccc}
H(x_0) = f(x_0) & H'(x_0) = f'(x_0) & \ldots & H^{(k_0)}(x_0) = f^{(k_0)}(x_0) \\
H(x_1) = f(x_1) & H'(x_1) = f'(x_1) & \ldots & H^{(k_1)}(x_1) = f^{(k_1)}(x_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
H(x_n) = f(x_n) & H'(x_n) = f'(x_n) & \ldots & H^{(k_n)}(x_n) = f^{(k_n)}(x_n).
\end{array}$$

Fakt

Tak postawione zagadnienie Hermite'a ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

Fakt

Tak postawione zagadnienie Hermite'a ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

Dowód

Poszukujemy wielomianu H stopnia co najwyżej $k_0 + k_1 + \ldots + k_n + n - 1$ takiego, że:

$$\begin{array}{cccc} H(x_0) = y_{0,0} & H'(x_0) = y_{0,1} & \ldots & H^{(k_0)}(x_0) = y_{0,k_0} \\ H(x_1) = y_{1,0} & H'(x_1) = y_{1,1} & \ldots & H^{(k_1)}(x_1) = y_{1,k_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H(x_n) = y_{n,0} & H'(x_n) = y_{n,1} & \ldots & H^{(k_n)}(x_0) = y_{n,k_n}. \end{array}$$

Zauważmy, że mamy układ $k_0 + k_1 + \ldots + k_n + n$ równań liniowych o $k_0 + k_1 + \ldots + k_n + n$ niewiadomych (współczynnikach poszukiwanego wielomianu H).

Dowód cd.

Z algebry liniowej wiemy, że układ taki ma jednoznacze rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy układ jednorodny:

$$\begin{array}{cccc}
\overline{H}(x_0) = 0 & \overline{H}'(x_0) = 0 & \dots & \overline{H}^{(k_0)}(x_0) = 0 \\
\overline{H}(x_1) = 0 & \overline{H}'(x_1) = 0 & \dots & \overline{H}^{(k_1)}(x_1) = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\overline{H}(x_n) = 0 & \overline{H}'(x_n) = 0 & \dots & \overline{H}^{(k_n)}(x_0) = 0.
\end{array}$$

ma tylko rozwiązanie zerowe (bo macierz jest odwracalna dokładnie wtedy gdy ma trywialne jądro).

Dowód cd.

Kolejne wiersze dają nam, że:

$$
\begin{aligned}
(x-x_0)^{k_0+1} &\mid \overline{H} \\
(x-x_1)^{k_1+1} &\mid \overline{H} \\
&\dots \\
(x-x_n)^{k_n+1} &\mid \overline{H}.
\end{aligned}
$$

Zatem $(x-x_0)^{k_0+1}(x-x_1)^{k_1+1}\dots(x-x_n)^{k_n+1} \mid \overline{H}$. Ale $\overline{H}$ było z założenia wielomianem stopnia co najwyżej $k_0+k_1+\ldots+k_n+n-1$. Stąd $\overline{H}=0$. $\square$

Uwagi

- Interpolacja Lagrange'a jest szczególnym przypadkiem interpolacji Hermite'a (mianowicie gdy $k_0 = k_1 = \ldots = k_n = 0$).

Uwagi

- Interpolacja Lagrange'a jest szczególnym przypadkiem interpolacji Hermite'a (mianowicie gdy $k_0 = k_1 = \ldots = k_n = 0$).
- Jeżeli mamy tylko jeden węzeł (ale stawiamy ewentualnie warunki na pochodne), to wielomian interpolacyjny Hermite'a dla funkcji f jest po prostu wielomianem Taylora w tym punkcie.

Do wyznaczania wielomianu Hermite'a można użyć zarówno odpowiednika bazy Lagrange'a (tutaj znacznie bardziej skomplikowanego) jak i odpowiednika bazy Newtona. Poznamy tylko tę drugą metodę, bo różnice w stosunku do interpolacji Lagrange'a są niewielkie:

Do wyznaczania wielomianu Hermite'a można użyć zarówno odpowiednika bazy Lagrange'a (tutaj znacznie bardziej skomplikowanego) jak i odpowiednika bazy Newtona. Poznamy tylko tę drugą metodę, bo różnice w stosunku do interpolacji Lagrange'a są niewielkie:

- Węzeł x_i zapisujemy w tabelce $k_i + 1$ razy (czyli tyle razy, ile mamy warunków postawionych w tym punkcie). Koniecznie należy umieścić kopie węzła w sąsiadujących wierszach.

Do wyznaczania wielomianu Hermite'a można użyć zarówno odpowiednika bazy Lagrange'a (tutaj znacznie bardziej skomplikowanego) jak i odpowiednika bazy Newtona. Poznamy tylko tę drugą metodę, bo różnice w stosunku do interpolacji Lagrange'a są niewielkie:

- Węzeł x_i zapisujemy w tabelce $k_i + 1$ razy (czyli tyle razy, ile mamy warunków postawionych w tym punkcie). Koniecznie należy umieścić kopie węzła w sąsiadujących wierszach.
- Tabelkę konstruujemy tak samo jak ostatnio. W pierwszej kolumnie wpisujemy (być może powtarzając) pożądane wartości wielomianu interpolacyjnego (nie pochodnych). Następnie prowadzimy obliczenia ilorazów różnicowych. Jeżeli trafimy na koniecznośc wyliczenia wartości $\frac{0}{0}$, to wpisujemy w kolejnych kolumnach wartości $\frac{f^k(x_i)}{k!}$. Jeżeli nie popełnimy błędu (a problem był poprawnie postawiony), wykorzystamy wszystkie warunki.

Do wyznaczania wielomianu Hermite'a można użyć zarówno odpowiednika bazy Lagrange'a (tutaj znacznie bardziej skomplikowanego) jak i odpowiednika bazy Newtona. Poznamy tylko tę drugą metodę, bo różnice w stosunku do interpolacji Lagrange'a są niewielkie:

- Węzeł x_i zapisujemy w tabelce $k_i + 1$ razy (czyli tyle razy, ile mamy warunków postawionych w tym punkcie). Koniecznie należy umieścić kopie węzła w sąsiadujących wierszach.
- Tabelkę konstruujemy tak samo jak ostatnio. W pierwszej kolumnie wpisujemy (być może powtarzając) pożądane wartości wielomianu interpolacyjnego (nie pochodnych). Następnie prowadzimy obliczenia ilorazów różnicowych. Jeżeli trafimy na koniecznośc wyliczenia wartości $\frac{0}{0}$, to wpisujemy w kolejnych kolumnach wartości $\frac{f^k(x_i)}{k!}$. Jeżeli nie popełnimy błędu (a problem był poprawnie postawiony), wykorzystamy wszystkie warunki.
- Elementy bazy zawierają również potegi dwumianów $(x - x_i)$.

- Baza wygląda następująco:

$$1, x - x_0, (x - x_0)^2, (x - x_0)^3, \dots, (x - x_0)^{k_0+1}$$
$$(x - x_0)^{k_0+1}(x - x_1), \dots, (x - x_0)^{k_0+1}, (x - x_1)^{k_1+1}$$
$$\dots, (x - x_0)^{k_0+1}(x - x_1)^{k_1+1}(x - x_2)^{k_2+1} \dots (x - x_n)^{k_n}$$

Przykład

Znajdziemy wielomian interpolacyjny Hermite'a H dla wielomianu

$$f(x) = 4x^7 + x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 5,$$

przyjmując $x_0 = 0$, $k_0 = 3$, $x_1 = 1$, $k_1 = 2$. Oznacza to, że wielomian H będzie miał stopień co najwyżej 6. Tworzymy tabelkę jak dla wielomianu Lagrange'a, uwzględniając wielokrotne węzły.

0	5
0	5
0	5
0	5
1	11
1	11
1	11

$$
\begin{array}{ccc}
0 & 5 & \\
 & & -1 \\
0 & 5 & \\
 & & -1 \\
0 & 5 & \\
 & & -1 \\
0 & 5 & \\
 & & 6 \\
1 & 11 & \\
 & & 40 \\
1 & 11 & \\
 & & 40 \\
1 & 11 &
\end{array}
$$

0	5		
		−1	
0	5		2
		−1	
0	5		2
		−1	
0	5		7
		6	
1	11		34
		40	
1	11		108
		40	
1	11		

0	5			
		-1		
0	5		2	
		-1		-5
0	5		2	
		-1		5
0	5		7	
		6		27
1	11		34	
		40		74
1	11		108	
		40		
1	11			

0	5				
		-1			
0	5		2		
		-1		-5	
0	5		2		10
		-1		5	
0	5		7		22
		6		27	
1	11		34		47
		40		74	
1	11		108		
		40			
1	11				

0	5					
		-1				
0	5		2			
		-1		-5		
0	5		2		10	
		-1		5		12
0	5		7		22	
		6		27		25
1	11		34		47	
		40		74		
1	11		108			
		40				
1	11					

0	5						
		-1					
0	5		2				
		-1		-5			
0	5		2		10		
		-1		5		12	
0	5		7		22		13
		6		27		25	
1	11		34		47		
		40		74			
1	11		108				
		40					
1	11						

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 5 & & & & & \\
 & & -1 & & & & \\
0 & 5 & & 2 & & & \\
 & & -1 & & -5 & & \\
0 & 5 & & 2 & & 10 & \\
 & & -1 & & 5 & & 12 \\
0 & 5 & & 7 & & 22 & & 13 \\
 & & 6 & & 27 & & 25 \\
1 & 11 & & 34 & & 47 & \\
 & & 40 & & 74 & & \\
1 & 11 & & 108 & & & \\
 & & 40 & & & & \\
1 & 11 & & & & &
\end{array}
$$

Odczytujemy wielomian w bazie Newtona:

$$H(x) = 5 - x + 2x^2 - 5x^3 + 10x^4 + 12x^4(x-1) + 13x^4(x-1)^2.$$

Błąd interpolacji Hermite'a

Załóżmy, że wszystkie dane są jak w zagadnieniu Hermite'a. Niech $K = k_0 + k_1 + \ldots + k_n + n$ będzie liczbą danych zagadnienia Hermite'a. Niech f będzie funkcją klasy C^K na przedziale I zawierającym wszystkie punkty $x_0, \ldots, x_n$. Wtedy dla każdego $x \in I$ istnieje $\xi \in I$ takie, że

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x - x_0)^{k_0+1}(x - x_1)^{k_1+1} \ldots (x - x_n)^{k_n+1}.$$

Błąd interpolacji Hermite'a

Załóżmy, że wszystkie dane są jak w zagadnieniu Hermite'a. Niech $K = k_0 + k_1 + \ldots + k_n + n$ będzie liczbą danych zagadnienia Hermite'a. Niech f będzie funkcją klasy C^K na przedziale I zawierającym wszystkie punkty $x_0, \ldots, x_n$. Wtedy dla każdego $x \in I$ istnieje $\xi \in I$ takie, że

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x - x_0)^{k_0+1}(x - x_1)^{k_1+1} \ldots (x - x_n)^{k_n+1}.$$

Wniosek – błąd interpolacji Lagrange'a

Załóżmy, że wszystkie dane są jak w zagadnieniu Lagrange'a. Niech f będzie funkcją klasy n na przedziale I zawierającym wszystkie punkty $x_0, \ldots, x_n$. Wtedy dla każdego $x \in I$ istnieje $\xi \in I$ takie, że

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Dowód – preliminaria

Wielokrotny pierwiastek

Mówimy, że funkcja różniczkowalna f ma w punkcie x pierwiatek k-krotny, jeżeli:

$$f(x) = f'(x) = \ldots f^{(k-1)}(x) = 0.$$

Uogólnione twierdzenie Rolle'a

Przypuśćmy, że funkcja klasy C^k ma na przedziale $[a, b]$ $k+1$ pierwiastków (licząc z krotnościami). Wtedy istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że:

$$f^{(k)}(\xi) = 0.$$

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i.

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i. Niech $P(t) = (t - x_0)^{k_0+1}(t - x_1)^{k_1+1} \dots (t - x_n)^{k_n+1}$.

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i. Niech $P(t) = (t - x_0)^{k_0+1}(t - x_1)^{k_1+1} \dots (t - x_n)^{k_n+1}$. Rozważamy funkcję $g(t) = f(t) - H(t) - \frac{f(x)-H(x)}{P(x)} P(t)$.

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i. Niech $P(t) = (t - x_0)^{k_0+1}(t - x_1)^{k_1+1} \dots (t - x_n)^{k_n+1}$. Rozważamy funkcję $g(t) = f(t) - H(t) - \frac{f(x)-H(x)}{P(x)} P(t)$.

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i. Niech $P(t) = (t - x_0)^{k_0+1}(t - x_1)^{k_1+1} \dots (t - x_n)^{k_n+1}$. Rozważamy funkcję $g(t) = f(t) - H(t) - \frac{f(x)-H(x)}{P(x)} P(t)$. Zauważmy, że g jest funkcją klasy C^K, ponadto w każdym punkcie x_i ma pierwiastek o krotności $k_i + 1$. Ponadto $g(x) = 0$. Zatem g ma w przedziale $K + 1$ pierwiastków (licząc z krotnościami) w przedziale I.

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i. Niech $P(t) = (t - x_0)^{k_0+1}(t - x_1)^{k_1+1} \dots (t - x_n)^{k_n+1}$. Rozważamy funkcję $g(t) = f(t) - H(t) - \frac{f(x)-H(x)}{P(x)}P(t)$. Zauważmy, że g jest funkcją klasy C^K, ponadto w każdym punkcie x_i ma pierwiastek o krotności $k_i + 1$. Ponadto $g(x) = 0$. Zatem g ma w przedziale $K + 1$ pierwiastków (licząc z krotnościami) w przedziale I. Z tw. Rolle'a istnieje $\xi \in I$ takie, że $g^{(K)}(\xi) = 0$.

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i. Niech $P(t) = (t - x_0)^{k_0+1}(t - x_1)^{k_1+1} \dots (t - x_n)^{k_n+1}$.
Rozważamy funkcję $g(t) = f(t) - H(t) - \frac{f(x)-H(x)}{P(x)} P(t)$.
Zauważmy, że g jest funkcją klasy C^K, ponadto w każdym punkcie x_i ma pierwiastek o krotności $k_i + 1$. Ponadto $g(x) = 0$. Zatem g ma w przedziale $K + 1$ pierwiastków (licząc z krotnościami) w przedziale I. Z tw. Rolle'a istnieje $\xi \in I$ takie, że $g^{(K)}(\xi) = 0$. Stąd

$$g^{(K)}(\xi) = f^{(K)}(\xi) - \frac{f(x) - H(x)}{P(x)} K! = 0.$$

Dowód cd.

Jeżeli x jest jednym z węzłów interpolacji, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więć, że $x \in I$ nie jest żadnym z węzłów x_i. Niech $P(t) = (t - x_0)^{k_0+1}(t - x_1)^{k_1+1} \dots (t - x_n)^{k_n+1}$. Rozważamy funkcję $g(t) = f(t) - H(t) - \frac{f(x)-H(x)}{P(x)}P(t)$. Zauważmy, że g jest funkcją klasy C^K, ponadto w każdym punkcie x_i ma pierwiastek o krotności $k_i + 1$. Ponadto $g(x) = 0$. Zatem g ma w przedziale $K + 1$ pierwiastków (licząc z krotnościami) w przedziale I. Z tw. Rolle'a istnieje $\xi \in I$ takie, że $g^{(K)}(\xi) = 0$. Stąd

$$g^{(K)}(\xi) = f^{(K)}(\xi) - \frac{f(x) - H(x)}{P(x)} K! = 0.$$

Zatem, wstawiając definicję $P(x)$ mamy, że:

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x - x_0)^{k_0+1}(x - x_1)^{k_1+1} \dots (x - x_n)^{k_n+1}. \quad \square$$

Interpolacja z użyciem większej liczby węzłów jest bardziej pracochłonna niż dla mniejszej liczby węzłów. naturalnym jest więc oczekiwanie, że gdy liczba węzłów rośnie, to różnica między funkcją a jej wielomianem interpolacyjnym maleją. Niestety, w ogólności nie jest to prawdą.

Przykład Rungego

Niech $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Poniżej zaznaczono wielomiany interpolacyjne Lagrange'a oparte na równoodległych węzłach na przedziale $[-5, 5]$ dla 3, 5, 7 i 9 węzłów.

Zauważmy, że błąd interpolacji zamiast maleć, rośnie!

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa definiujemy następująco:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa definiujemy następująco:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

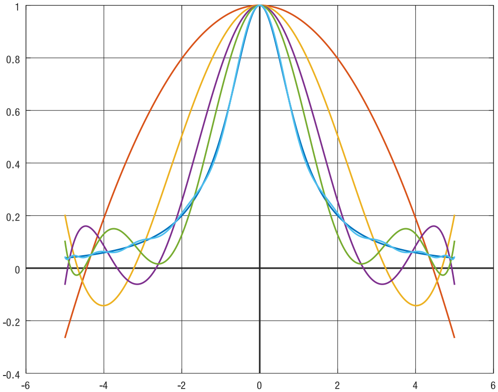
Pierwsze pięc wielomianów Czebyszewa to:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

Wykresy wielomianów Czebyszewa

Zera wielomianów Czebyszewa a zjawisko Rungego

Niech $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Poniżej zaznaczono wielomiany interpolacyjne Lagrange'a oparte na zerach wielomianu $T_n(x/5)$ na przedziale $[-5, 5]$ dla $n = 3, 5, 7, 9 i 21$.



Zauważmy, że tym razem wielomiany interpolacyjne są coraz lepsze.

Dla każdej funkcji istnieje dobry układ węzłów

Twierdzenie Marcinkiewicza

Dla każdej funkcji ciągłej f na $[-1, 1]$ istnieje ciąg układów węzłów taki, że ciąg odpowiednich wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a dla f jest jednostajnie zbieżny do f.

Dla każdej funkcji istnieje dobry układ węzłów

Twierdzenie Marcinkiewicza

Dla każdej funkcji ciągłej f na $[-1, 1]$ istnieje ciąg układów węzłów taki, że ciąg odpowiednich wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a dla f jest jednostajnie zbieżny do f.

Tweirdzenie to wynika z dwóch faktów. Po pierwsze, z twierdzenia Weierstrassa istnieje ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do funkcji f.

Dla każdej funkcji istnieje dobry układ węzłów

Twierdzenie Marcinkiewicza

Dla każdej funkcji ciągłej f na $[-1, 1]$ istnieje ciąg układów węzłów taki, że ciąg odpowiednich wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a dla f jest jednostajnie zbieżny do f.

Tweirdzenie to wynika z dwóch faktów. Po pierwsze, z twierdzenia Weierstrassa istnieje ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do funkcji f. Po drugie, z twierdzenia Czebyszewa wynika, że dla każdego n wielomian, który przybliża f najlepiej spośród wielomianów stopnia co najwyżej n jest w istocie pewnym wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a dla f.

Dla każdego układu węzłów istnieje zła funkcja

Twierdzenie Fabera (1914)

Dla każdego układu węzłów na $[-1, 1]$ istnieje funkcja ciągła f taka, że ciąg odpowiednich wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a dla f nie jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Istnieje bardzo dobry układ węzłów

Twierdzenie Kriłowa (1956)

Dla każdej funkcji absolutnie ciągłej f na przedziale $[-1, 1]$ ciąg wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a w węzłach Czebyszewa jest jednostajnie zbieżny do f.

Twierdzenie Kriłowa (1956)

Dla każdej funkcji ciągłej f o ograniczonej wariacji na przedziale $[-1, 1]$ ciąg wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a w węzłach Czebyszewa jest jednostajnie zbieżny do f.

Istnieje bardzo dobry układ węzłów cd.

Wniosek z twierdzenia Diniego

Jeśli moduł jednostajnej ciągłości ω_f funkcji f na przedziale $[-1, 1]$ spełnia

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) \ln \delta = 0$$

(warunek Diniego-Lipshitza), to ciąg wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a w węzłach Czebyszewa jest jednostajnie zbieżny do f.

Absolutna ciągłość

Definition

Funkcję $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ nazywamy absolutnie ciągłą, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego układu rozłącznych przedziałów

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n] \subset [-1,1]$$

takich, że $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_1| < \delta$ mamy, że

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Uwaga

Każda funkcja absolutnie ciągła jest jednostajnie ciągła, ale nie na odwrót. Kontrprzykładem jest funkcja Cantora.

Wariacja funkcji

Definition

Niech $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Wariacją całkowitą funkcji f nazywamy liczbę

$$V(f) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| : -1 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq 1\right\},$$

gdzie supremum rozciąga się po wszystkich możliwych skończonych układach punktów odcinka.
Funkcja ma ograniczoną wariację, gdy $V(f) < \infty$.

Uwaga

Każda funkcja monotoniczna ma ograniczoną wariację.

Moduł jednostajnej ciągłości

Definition

Niech $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Modułem jednostajnej ciągłości (czasem w skrócie: modułem ciągłości) funkcji f nazywamy każdą funkcję $\omega_f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ spełniającą

$$|f(x) - f(y)| < \omega_f(|x-y|)$$

dla wszystkich $x, y \in [-1,1]$. Modułów ciągłości może być dużo, w praktyce interesuje nas możliwie najmiejsza taka funkcja. Istotne jest zachowanie modułu w okolicy zera.
Moduł jednostajnej ciągłości koduje zależność δ od ε w epsilonowo-deltowej definicji jednostajnej ciągłości.