1. Liczby zespolone

Zad. 1.1 Dla jakich liczb zespolonych z:

a) $z^2 = 1$; b) $z^2 = -1$; c) z^2 jest liczb ujemn;

d) z^4 jest liczb dodatni?

Zad. 1.2 Oblicz:

a) $(3+7i)(2-i)$; b) $\frac{23+i}{7-2i}$; c) $\sqrt{15-8i}$;

d) $\left(\overline{1+2i}\right)^2$; e) $\mathrm{Re}\left((12i-3)(7-i)\right)$; f) $|-24+7i|$.

Zad. 1.3 Oblicz $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^{32}$.

Zad. 1.4 Oblicz $(2+i)(3+i)$. Wywnioskuj std, e $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Zad. 1.5 Korzystajc z wasnoci liczb zespolonych wyra $\sin 4\alpha$ i $\cos 4\alpha$ przez $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Zad. 1.6 Narysuj zbiory liczb zespolonych:

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Im}\, z < 1\}$; b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, e^{-i\theta} z > 0\}$, gdzie $\theta \in \mathbb{R}$;

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1+2i| = \sqrt{5}\}$; d) $\{z \in \mathbb{C} : |z+3+i| = |z+1|\}$.

Zad. 1.7 Zbadaj zbieno cigu liczb zespolonych o wyrazie ogólnym:

a) $\frac{e^{in}\sin n}{\sqrt{n}}$; b) $\frac{3ni+1}{5n-i}$; c) $\frac{e^{3n}-ie^{in}}{e^{3n}+4ie^{2n}}$.

Zad. 1.8 Zbadaj zbieno szeregów liczb zespolonych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{(3i)^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}n!}{n^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

Zadania do samodzielnego rozwizania

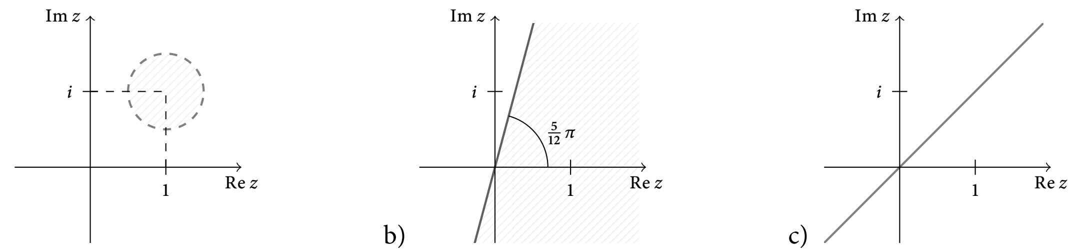
Zad. dod. 1.1 Oblicz:

a) $\frac{(1+i)^{31}}{(1-i\sqrt{3})^{13}}$ b) $\frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}+i)^{10}}$

Zad. dod. 1.2 Poka, e $\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$.
Wskazówka: uyj wzoru na sumăskoczonego postpu geometrycznego.

Zad. dod. 1.3 Korzystajc ze wzoru $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ wyra $\cos^3\theta$ przez wartoci $\cos\theta, \cos 2\theta, \ldots$.

Zad. dod. 1.4 Przedstaw ponisze zbiory w postaci analogicznej do zadania 6:



Zad. dod. 1.5 Zbada zbieno cigów i szeregów liczb zespolonych:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+i}{5n-4i}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4+3i}{5}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$.

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in}}{\log n}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}\sin n}{\sqrt{n}}$;

Zad. dod. 1.6 Niech P bidzie wielomianem o wspóczynnikach rzeczywistych. Pokaza, e $P(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(\overline{z}) = 0$.

Zad. dod. 1.7 Uywajc jednego z pakietów matematycznych znale pierwiastki poniszych wielomianów. Zaznaczy na jednym rysunku pierwiastki wielomianu i jego pochodnej:

a) $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$;

b) $P'(z) = 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$;

c) $Q(z) = 17z^6 + 14z^4 + 8z^3 - 4z^2 + 2z - 3$;

d) $Q'(z) = 102z^5 + 56z^3 + 24z^2 - 8z + 2$;

e) $R(z) = z^4 + (8 + 11i)z^3 + (85i - 47)z^2 - (198 + 274i)z + 720 - 240i$;

f) $R'(z) = 4z^3 + (24 + 33i)z^3 + (170i - 94)z^2 - 198 - 274i$.

Na postawie sporzdzonych trzech rysunków sformuowa hipotez o pooeniu pierwiastków pochodnej wielomianu w stosunku do pierwiastków wyjciowego wielomianu.

***Zad. dod. 1.8** Udowodni hipotezăpostawionăw poprzednim zadaniu.
Wskazówka: Patrz zbiór zada Jana Krzya, zadania 1.1.31, 1.1.32.

Rozwizania do zada domowych

1.1.

a) $2\sqrt{3} + 2 + (2\sqrt{3} - 2)i$;

b) $\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)i$;

1.2

$$(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + \dots + (\cos(2n-1)\theta + i\sin(2n-1)\theta)$$

$$= e^{i\theta} + e^{3i\theta} + \dots + e^{(2n-1)i\theta} = e^{i\theta}\frac{1 - e^{2ni\theta}}{1 - e^{2i\theta}}$$

$$= \frac{e^{i\theta}(1 - e^{2ni\theta})(1 - e^{-2i\theta})}{(1 - e^{2i\theta})(1 - e^{-2i\theta})} = \frac{(1 - e^{2ni\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(2 - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})} = \frac{2i\sin\theta(1 - e^{2ni\theta})}{2 - 2\cos 2\theta}$$

Biorc czci rzeczywiste obu stron dostajemy, e

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos(2n-1)\theta = \frac{\sin\theta\sin 2n\theta}{1 - \cos 2\theta} = \frac{\sin\theta\sin 2n\theta}{2\sin^2\theta} = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

1.3

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right) = \frac{1}{8}\cos 3\theta + \frac{3}{8}\cos\theta$$

1.4

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i - i| < \frac{1}{2}\}$　b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} e^{-\frac{5}{12}\pi} z \geq 0\}$　c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$

1.5

a) granica równa $\frac{3}{5}$　b) granica nie istnieje

c) absolutnie zbieny, np. z kryterium d'Alamberta　d) absolutnie zbieny, geometryczny

e) absolutnie zbieny, np. z kryterium d'Alamberta　f) zbieny, np. z kryterium Dirichleta

g) rozbieny, szereg czci urojonych nie jest zbieny (wymaga dowodu!)

2. Funkcje holomorficzne

Zad. 2.1 Wyznaczyăcz rzeczywistăi urojonăfunkcji:

a) $f(z) = z^3$;　b) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$.

Zad. 2.2 Czy mona zdefiniowa $f(0)$ tak aby funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bya ciga, gdzie dla $z \neq 0$ mamy:

a) $f(z) = \frac{z}{|z|}$　b) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$

c) $f(z) = \frac{\bar{z}\operatorname{Re} z}{z}$

Zad. 2.3 Zróniczkowa funkcjăzmiennej zespolonej:

a) $f(z) = \frac{1}{z}$;　b) $f(z) = \bar{z}$.

Zad. 2.4 Czy funkcja $f(x+iy) = e^x\cos y + ie^x\sin y$ spenia równania Cauchy'ego-Riemanna?

Zad. 2.5 Pokaza, e funkcja dana poniszym wzorem nie jest róniczkowalna w $z = 0$, mimo, e spenia w tym punkcie równania Cauchy'ego-Riemanna:

a) $f(z) = f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$;

Zad. 2.6 Znajd funkcjă$v(x,y)$ tak aby funkcja $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ bya holomorficzna na $\mathbb{C}$, gdy

a) $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ i $f(0) = 1$;　b) $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ i $f(0) = 1$.

Zad. 2.7 Poka, e funkcja $f(z) = f(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ jest róniczkowalna w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Zad. 2.8 Zbadaj zachodzenie równa Cauchy'ego-Riemanna dla funkcji:

a) $f(x+iy) = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$;　b) $f(x+iy) = \cos x - i\sin y$.

Zad. 2.9 Poka, e odwzorowanie $z \mapsto \overline{z}$ jest róniczkowalne jako odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ (oznacza to, e pochodna ta jest odwzorowaniem $\mathbb{R}$-liniowym). Pokaza, e ta pochodna nie jest odwzorowaniem liniowym, gdy traktowa j jako odwzorowanie z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Zad. 2.10 Udowodni, e jeeli funkcja $f = u + iv \in H(U)$, gdzie U jest obszarem, to dla $x_0 + iy_0 \in U$ mamy

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Zad. 2.11 Niech $f(x + iy) = y^2 3ix^2$. Znale punkty, w których f jest róniczkowalna oraz obliczy pochodn w tych punktach.

Zad. 2.12 Niech U bdzie obszarem i $f\colon U \to \mathbb{C}$ funkcjäholomorficzn tak, e $f'(z) = 0$ dla $z \in U$. Poka, e f jest funkcjästa. Poprzez odpowiedni przykad poka, e zaoenia spójnoci U nie mona pomin.

Zad. 2.13 Niech $f \in H(\mathbb{D})$ spenia jeden z warunków:

a) $\operatorname{Re} f = 0$; b) $\overline{f} \in H(\mathbb{D})$. c) $|f| = \text{const}$;

Poka w kadym przypadku, e f jest funkcjästa.

Zadania do samodzielnego rozwizania

Zad. dod. 2.1 Jak zwizualizowa funkcj $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$? Znale wykres funkcji $z \mapsto \frac{\overline{z}^2}{z}$.

Zad. dod. 2.2 Zróniczkowa funkcj $z \mapsto z^n$. Wywnioskowa std, e wielomiany zespolone róniczkujemy tak samo jak wielomiany rzeczywiste.

Zad. dod. 2.3 Czy mona zdefiniowa $f(0)$ tak aby funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bya ciga, gdzie dla $z \neq 0$ mamy:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z-1)}{z}$ b) $\frac{\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}{z^2}$

Zad. dod. 2.4 Pokaza, e funkcja dana poniszym wzorem nie jest róniczkowalna w $z = 0$, mimo, e spenia w tym punkcie równania Cauchy'ego-Riemanna:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{Im} z^2}{z^2}$, $f(0) = 0$.

Zad. dod. 2.5 Poka, e funkcja $f(z) = z \operatorname{Re} z$ jest róniczkowalna tylko w $z = 0$.

Zad. dod. 2.6 Poka równania Cauchy'ego-Riemanna dla funkcji $z \mapsto e^z$. Znajd pochodn tej funkcji.

Zad. dod. 2.7 Niech f bdzie jak napisano poniej. Znale punkty, w których f jest róniczkowalna oraz obliczy pochodn w tych punktach.

a) $f(x + iy) = 2xy + 2iy$; b) $f(x + iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$; c) $f(x + iy) = 2x^2 + y + i(y^2x)$.

Zad. dod. 2.8 Dla jakich liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x + iy) = x + ay + ibx + icy$ jest róniczkowalna?

Zad. dod. 2.9 Znale wszystkie funkcje cakowite $f = u + iv$ takie, e $u(x, y) = x^2 + y^2$.

Zad. dod. 2.10 Znale funkcj $f \in H(\mathbb{C})$, tak, e $f = u + iv$, wiedzc, e:

a) $u(x, y) = x^3 6x^2 y 3xy^2 + 2y^3$, $f(0) = 0$; b) $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = i$.

Zad. dod. 2.11 Niech U bdzie obszarem w $\mathbb{C}$ i niech $f, g \in H(U)$ bd takimi funkcjami, e $f'(z) = g'(z)$ dla $z \in U$. Pokaza, e $f g$ jest funkcj sta.

Zad. dod. 2.12 Znale wszystkie funkcje cakowite $f = u + iv$, speniajce równo $u(z) = v^2(z)$ dla kadego $z \in \mathbb{C}$.

Zad. dod. 2.13 Niech $f \in H(\mathbb{D})$ spenia $|f| = \text{const}$. Poka, e f jest funkcjąsta.

Zad. dod. 2.14 Udowodni, e jeeli funkcja $f = u + iv \in H(U)$, gdzie U jest obszarem, to dla $x_0 + iy_0 \in U$ mamy

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Zad. dod. 2.15 Niech U bdzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i niech $f \in H(U)$. Niech $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$. Pokaza, e jeeli pochodne czstkowe drugiego rzdu u s cige, to

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. Szeregi potgowe i szeregi Taylora

Zad. 3.1 Znale promie zbienoci i zbada zachowanie szeregu na brzegu koa zbienoci:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Zad. 3.2 Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ bdzie szeregiem potgowym i $a_n \neq 0$. Pokaza, e jeeli istnieje granica

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

to promie zbienoci szeregu wynosi R.

Zad. 3.3 Znajd promie zbienoci szeregu:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n z^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$.

Zad. 3.4 Poka, e jeeli szereg potgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma promie zbienoci R_1, a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ – promie zbienoi R_2, to promie zbienoci R szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ spenia $R \geq R_1 R_2$.

Zad. 3.5 Znajd koo zbienoci szeregu potgowego:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (2i)^n (z - i)^{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n7^n} (z - 2i + 3)^{2n}$.

Zad. 3.6 Przypumy, e szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma promie zbienoci r. Wyznacz promienie zbienoci szeregów:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^d a_n z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$;

Zad. 3.7 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie $3i$ dla funkcji $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

Zad. 3.8 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie 0 dla funkcji $f(z) = \frac{1}{a-z}$.

Zad. 3.9 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie 0 dla funkcji $f(z) = z^2 e^{-z^3}$.

Zad. 3.10 Poka e wspóczynniki Taylora a_n w punkcie 0 funkcji $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ speniaj:

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

czyli s wyrazami cigu Fibonacciego. Rozkadajc f na uamki proste, znale wzór na a_n.

Zad. 3.11 Znale szereg Taylora w zerze dla funkcji $z \mapsto \sin z$. Korzystajc z tego szeregu zbada holomorficzno funkcji

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0; \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Zadania do samodzielnego rozwizania

Zad. dod. 3.1 Zbadaäzbieno szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} + i \frac{\cos n}{n^2}\right)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n!} i^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+4i}{4}\right)^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{n!}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{(n+37)^2}$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4i}{n^3}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{4n^2} i^n$.

Zad. dod. 3.2 Znale obszar zbienoci szeregów potgowych:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+1)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! z^{n-1}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n+1}}{n+1}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{n+1}} (z-2i)^n$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n(1+i)} (z+3i)^n$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2i)^n} (z)^{3n}$;

Zad. dod. 3.3 Poka, e jeeli szereg potgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma promie zbienoci R_1, a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ – promie zbienoi R_2, to promie zbienoci R szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n$ spenia $R \leq \frac{R_1}{R_2}$.

Zad. dod. 3.4 Przypumy, e szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma promie zbienoci r. Wyznacz promienie zbienoci szeregów:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} d^n a_n z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$.

Zad. dod. 3.5 Znale wszystkie funkcje cige $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takie, e dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $f(z) = f(2z)$.

Zad. dod. 3.6 Znale wszystkie funkcje cakowite $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takie, e dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $f(z) = \frac{1}{2} f(2z)$.

Zad. dod. 3.7 Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Poka, e $f'' = f$. Znajd wzór na $f(z)$.

Zad. dod. 3.8 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie 0 dla funkcji $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$..

Zad. dod. 3.9 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie i dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z}$.

Zad. dod. 3.10 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie 1 dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z-5}$.

Zad. dod. 3.11 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie 2 dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

Zad. dod. 3.12 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie 1 dla funkcji $f(z) = e^z$.

Zad. dod. 3.13 Znale szereg Taylora o rodku w punkcie 0 dla funkcji $f(z) = \frac{5z-17}{z^2-2z-15}$.

4. Caki krzywoliniowe

Twierdzenie 4.1 (Twierdzenie cakowe Cauchy'ego). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ bdzie jednospójnym zbiorem otwartym i niech $f \in H(\Omega)$. Wtedy*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

dla kadej kawakami gadkiej krzywej zamknitej γ w Ω.

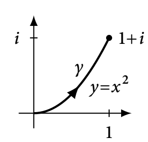
Twierdzenie 4.2 (Wzór cakowy Cauchy'ego). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ bdzie jednospójnym zbiorem otwartym i niech $f \in H(\Omega)$. Jeeli γ jest kawakami gadk krzyw Jordana w Ω, to dla z lecych we wntrzu krzywej γ zachodzi:*

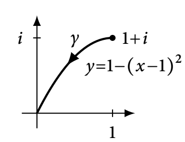
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Ogólniej, dla $n \geq 0$ mamy:

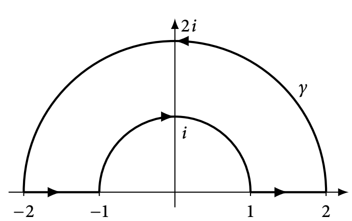
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Zad. 4.1 Znajd $\int_\gamma 2z\,\mathrm{d}z$, gdy γ jest jak na rysunku:

a) 

b) 

Zad. 4.2 Znajd $\int_\gamma \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$, gdy γ jest jak na rysunku:

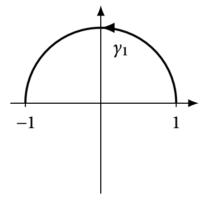


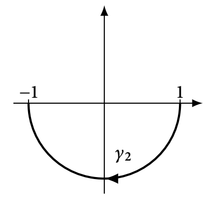
Zad. 4.3 Oblicz $\int_\gamma (z - z_0)^k\,\mathrm{d}z$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, gdy γ jest dodatnio zorientowanym okrgiem wokó z_0.

Zad. 4.4 Udowodnij, e jeeli γ jest krzyw gadk z punktu z_1 do z_2, to

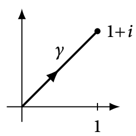
$$\int_\gamma \mathrm{d}z = z_2 - z_1.$$

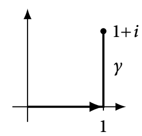
Zad. 4.5 Oblicz $\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ oraz $\int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}$, gdzie γ_1 i γ_2 sązorientowanymi póokrgami jak na rysunku:





Zad. 4.6 Oblicz $\int_\gamma \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$ gdzie γ jestąkrzyw jak na rysunku:

a) 

b) 

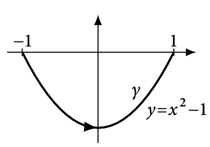
Zad. 4.7 Korzystajc ze wzoru cakowego Cauchy'ego oblicz (wszystkie okrgi sądodatnio zorientowane):

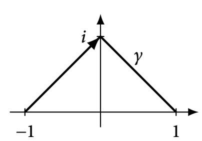
a) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \, \mathrm{d}z$; b) $\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2-2z} \, \mathrm{d}z$; c) $\int_{|z-2|=4} \frac{\cos z}{z^2+4} \, \mathrm{d}z$;

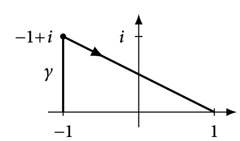
Zad. 4.8 Pokaza, e nie istnieje taka funkcja holomorficzna w $\mathbb{C}$, e $f'(z) = \frac{1}{z}$ dla $z \neq 0$.

Zadania do samodzielnego rozwizania

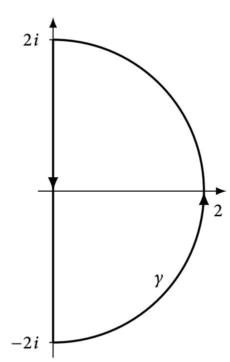
Zad. dod. 4.1 Oblicz $\int_\gamma \overline{z} \, \mathrm{d}z$, gdy γ jest jak na rysunku:

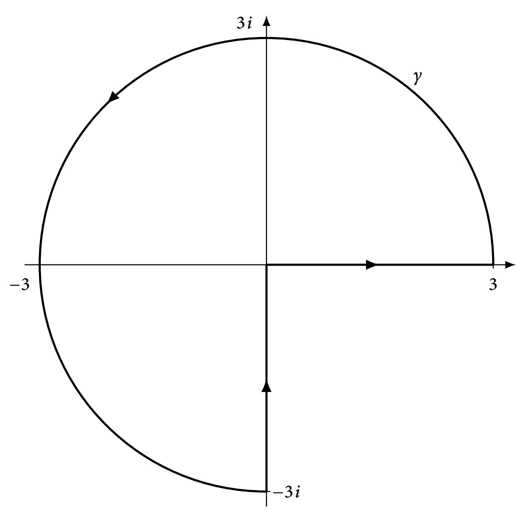
a) 

b) 

c) 

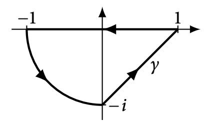
Zad. dod. 4.2 Oblicz $\int_\gamma |z| \, \mathrm{d}z$, gdy γ jest jak na rysunku:

a) 

b) 

Zad. dod. 4.3 Oblicz $\int_\gamma ze^{z^2}\,\mathrm{d}z$, gdy γ jest odcinkiem czcym $1+i$ oraz $1-i$.

Zad. dod. 4.4 Oblicz $\int_\gamma z\,\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$, gdy γ jest jak na rysunku:



Zad. dod. 4.5 Korzystajc ze wzoru cakowego Cauchy'ego oblicz (wszystkie okrgi sădodatnio zorientowane):

a) $\int_{|z|=2} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2-9)(z+i)}\,\mathrm{d}z$; b) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z$; c) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z$;

d) $\int_{|z|=2} \frac{z^2-3z+4}{z+i}\,\mathrm{d}z$; e) $\int_{|z|=1} \frac{z+2}{z^4+2iz^3}\,\mathrm{d}z$; f) $\int_{|z-1|=2} \left(5ze^z \sin z + \frac{z}{z+i}\right)\mathrm{d}z$;

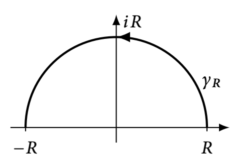
g) $\int_{|z-2|=2} \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^4-1}$.

Zad. dod. 4.6 Niech $f \in H(\mathbb{D})$, gdzie $\mathbb{D}$ to dysk jednostkowy. Korzystajc ze wzoru Cauchy'ego, obliczy dla $r<1$:

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{r\mathbb{D}} f(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. Zastosowania caek krzywoliniowych

Twierdzenie 5.1 (Lemat Jordana). *Niech γ_R bdzie dodatnio zorientowanym górnym póokrgiem o promieniu R i rodku w 0, jak na rysunku:*



Niech $\alpha>0$ i niech f bdzie funkcj okrelonăw punktach krzywej γ_R. Wtedy

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi}{\alpha}\sup_{\theta\in[0,\pi]} |f(Re^{i\theta})|.$$

Lemat 5.2. *Niech $\Delta = \{z\in\mathbb{C} : |z|\le R \wedge \theta_1 \le \operatorname{Arg} z \le \theta_2\}$ bdzie wycinkiem koa i niech*

$$\gamma_r = \left\{re^{i\theta} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2\right\}$$

dla $r<R$ bdzie ukiem okrgu zawartego w Δ. Niech $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$ bdzie funkcj cig tak, e $\lim_{z\to 0, z\in\Delta} f(z) = A$. Wtedy

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = iA(\theta_2-\theta_1).$$

Zad. 5.1 Oblicz cakăniewaciw $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

Zad. 5.2 Oblicz cak niewaciw $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Zad. 5.3 Korzystajc z poprzedniego zadania, oblicz caki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ i $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Zad. 5.4 Oblicz cak $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\sin\theta}$, gdzie $a \geq 1$.

Zad. 5.5 Oblicz cakăniewaciw $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Zad. 5.6 Poka, e jeeli γ jest dodatnio zorientowanym okrgiem o rodku w zerze, to dla $0 \leq r \leq n$ mamy:

$$\binom{n}{r} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{r+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Korzystajc z tego udowodnij, e $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

Zadania do samodzielnego rozwizania

Zad. dod. 5.1 Udowodnij oba podane twierdzenia.

Zad. dod. 5.2 Oblicz $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+6}{(x^2+1)(x^2-8x+25)}\,\mathrm{d}x$.

Zad. dod. 5.3 Oblicz $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$.

Zad. dod. 5.4 Oblicz $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-\cos\theta+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\theta$.

Zad. dod. 5.5 Oblicz caki $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ oraz $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ poprzez cakowanie po okrgu jednostkowym funkcji $z \mapsto \frac{e^z}{z^{n+1}}$.

Zad. dod. 5.6 Oblicz cak niewaciw $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

6. Zasada jednoznacznoci i zasada maksimum

Twierdzenie 6.1 (Zasada jednoznacznoci)**.** *Niech U bdzie obszarem w $\mathbb{C}$ i niech f oraz g bd funkcjami holomorficznymi na U. Jeeli zbiór $A \subseteq U$ ma punkt skupienia w U oraz $f = g$ na A, to $f = g$ na U.*

Twierdzenie 6.2 (Zasada maksimum)**.** *Niech U bdzie **ograniczonym** obszarem w $\mathbb{C}$. Jeeli f jest funkcj cig a na $\overline{U}$ i holomorficzn na U, to dla wszystkich $z \in U$*

$$|f(z)| \leq \sup_{z\in\partial U} |f(z)|.$$

Jeeli równo zachodzi cho w jednym punkcie $z \in U$, to f jest funkcj sta.

Zad. 6.1 Czy istnieje funkcja holomorficzna f na kole jednostkowym taka, e

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0,$$
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \ldots?$$

Zad. 6.2 Czy istnieje funkcja holomorficzna f na kole jednostkowym taka, e dla $n \geq 2$:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$?

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$?

Zad. 6.3 Co mona powiedzie o funkcji analitycznej dla $|z| < 3$, jeeli $f(i + i/n) = 3$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$?

Zad. 6.4 Znale rón od staej funkcj holomorficzn na dysku jednostkowym tak, e jej cig zer ma punkt skupienia w domknitym dysku jednostkowym.

Zad. 6.5 Niech U bdzie obszarem i niech $f \in H(U)$ bdzie taka, e f jest ciga na $\overline{U}$. Przypumy, e $f \neq \text{const}$ i $f \neq 0$ w U. Pokaza, e

$$\inf_{z \in \partial U} |f(z)| \leq |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$$

dla $z \in U$.

Zad. 6.6 Niech U bdzie ograniczonym obszarem i niech $f \in H(U)$ bdzie taka, e f jest ciga na $\overline{U}$. Niech $f \neq \text{const}$ i $|f(z)| = M$ dla $z \in \partial U$ (gdzie $M \geq 0$). Pokaza, e f ma zero w U.

Zad. 6.7 Niech P bdzie wielomianem stopnia n. Pokaza, e zbiór $\{z : |P(z)| = M\}$ ma nie wicej ni n skadowych (gdzie $M \geq 0$).

Zad. 6.8 Niech U bdzie ograniczonym obszarem i niech $f, g \in H(U)$ bd takie, e f, g s cige na $\overline{U}$. Niech $f = g$ na brzegu U. Pokaza, e $f = g$ na U.

Zadania do samodzielnego rozwizania

Zad. dod. 6.1 Czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu zera, która w punktach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ przyjmuje odpowiednio wartoci

a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \frac{25}{26}, \ldots$; b) $1, 0, 0, 0, \ldots$; c) $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$;

Zad. dod. 6.2 Wyznaczy maksimum i minimum moduu funkcji

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ dla $|z - 2| < 2$;

b) $f(z) = e^z$ dla $z \in \mathbb{D}$;

c) $f(z) = e^{z^2}$ dla $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq 1$;

d) $f(z) = z^2 + 3z + 2$ dla $|z| < 2$;

Zad. dod. 6.3 Niech f bdzie funkcj holomorficzn na pewnym (niekoniecznie ograniczonym) obszarze U. Pokaza, e jeeli funkcja $\operatorname{Re} f$ przyjmuje ekstremum lokalne w pewnym punkcie U, to f jest staa.

Zad. dod. 6.4 Udowodni nastpujcy *Lemat Schwarza*:
Niech $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bdzie funkcj holomorficzn tak, e $f(0) = 0$. Wtedy $|f(z)| \leq |z|$ dla $z \in \mathbb{D}$ oraz $|f'(0)| \leq 1$. Ponadto, jeli $|f(z)| = |z|$ dla pewnego $z \in \mathbb{D}$ to $f(z) = az$ dla pewnego a takiego, e $|a| = 1$.

7. Szeregi Laurenta i osobliwoci funkcji analitycznych

Szeregiem laurenta o rodku w z_0 nazywamy wyraenie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Szereg $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ nazywamy czci gówn (osobliw) szeregu Laurenta, a pozosta cz – czci regularn.

Fakt 7.1. *Jeeli f jest funkcj holomorficzn na piercieniu $P = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, to dla $z \in P$ zachodzi*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{gdzie } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=h} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz.$$

Definicja 7.2. Niech $f \in H(U)$ oraz $z_0 \in U$. Mówimy, e f ma w z_0 k-krotne zero, jeeli

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(k)}(z_0).$$

Definicja 7.3. Niech U bdzie zbiorem otwartym i niech $z_0 \in U$. Jeli $f \in H(U \setminus \{z_0\})$, to mówimy, e f ma w z_0 osobliwo izolowan.

- Jeli istnieje funkcja $g \in H(U)$ taka, e $f(z) = g(z)$ dla $z \neq z_0$, to mówimy, e f ma w z_0 osobliwo pozorn (usuwaln).
- Jeli $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, to mówimy, e f ma z_0 biegun.
- Jeli nie zachodzi aden z powyszych przypadków, to mówimy, e f ma w z_0 osobliwo istotn.

Jeeli f ma biegun w z_0, to mówimy, e jest on rzdu k, gdy funkcja $\frac{1}{f}$, holomorficzna w otoczeniu z_0, ma w z_0 zero k-krotne.

Twierdzenie 7.4 (Riemanna o usuwaniu osobliwoci)**.** *Niech U bdzie zbiorem otwartym i niech $z_0 \in U$. Jeeli $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ oraz istnieje $r > 0$ takie, e funkcja $f|_{U \cap D(z_0,r)}$ jest ograniczona, to f ma w z_0 osobliwo usuwaln.*

Fakt 7.5. *Jeeli z_0 jest osobliwoci izolowan funkcji f, to f rozwija si w szereg Laurenta na pewnym piercieniu $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$. Szereg ten*

- *nie ma czci gównej wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w z_0 osobliwo pozorn.*
- *ma skoczon cz gówn wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w z_0 biegun.*
- *ma nieskoczon cz gówn wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w z_0 osobliwo istotn.*

Zad. 7.1 Znale szereg Laurenta dla funkcji

$$f(z) = \frac{1}{3z+3} + \frac{4}{z-5}$$

w piercieniach

a) $P_1 = \{z : |z| < 1\}$; b) $P_2 = \{z : 1 < |z| < 5\}$; c) $P_3 = \{z : 5 < |z|\}$.

Zad. 7.2 Znale szereg Laurenta dla funkcji

$$g(z) = \frac{6}{(3z+3)^2} - \frac{4}{(z-5)^2}$$

w piercieniach z poprzedniego zadania.

Zad. 7.3 Rozwi w szereg Laurenta dla $|z| > 0$ funkcj

a) $e^{\frac{1}{z}}$; b) $\frac{e^{z^2}}{z^4}$.

Zad. 7.4 Znajd obszar zbienoci szeregu $\sum_{n=-\infty}^{-1} 5^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n$ i znajd jego sum.

Zad. 7.5 Okrel krotno zera z_0 funkcji holomorficznej f

a) $f(z) = z^4 e^{z^2}$, $z_0 = 0$; b) $f(z) = z^3 \sin^2 z$, $z_0 = 0$; c) $f(z) = \frac{(z-\pi)^3}{\sin z}$, $z_0 = \pi$;

Zad. 7.6 Okrel punkty osobliwe i rodzaj osobliwoci funkcji:

a) $f(z) = \frac{z+i}{z^2+1}$; b) $f(z) = e^{1/z} z^3$; c) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;

d) $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$; e) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$; f) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+6iz-9}$.

Zadania do samodzielnego rozwizania

Zad. dod. 7.1 Funkcja f jest holomorficzna w caej paszczynie za wyjtkiem punktów 2, $2+i$ i $1+i$. Znajd maksymalne piercienie o rodku w zerze na których f rozwija si w szereg Laurenta.

Zad. dod. 7.2 Znale szereg Laurenta funkcji $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ w ssiedztwie punktu

a) 0;

b) 1.

Zad. dod. 7.3 Rozwin w szereg Laurenta o rodku w zerze funkcj $f(z) = \frac{6z+8}{(2z+3)(4z+5)}$ na wszystkich moliwych piercieniach.

Zad. dod. 7.4 Rozwin funkcj $f(z) = \frac{2}{z(z-1)^5(z-3)}$ w szereg Laurenta w piercieniu $1 < |z-1| < 2$.

Zad. dod. 7.5 Znale krotno zera z_0 funkcji holomorficznej:

a) $f(z) = z^5 - 10z^4 + 38z^3 - 68z^2 + 57z - 18$, $z_0 = 1$;

b) $f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $z_0 = k\pi$;

c) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$.

Zad. dod. 7.6 Okreli rodzaj osobliwoci funkcji f w punktach osobliwych:

a) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$;

b) $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$;

c) $f(z) = \cos \frac{1}{z^2}$.

8. Residua

Definicja 8.1. Niech z_0 bdzie osobliwoci izolowan funkcji f holomorficznej w ssiedztwie z_0. Residuum funkcji f w z_0 nazywamy wspóczynnik przy $\frac{1}{z-z_0}$ w szeregu Laurent f wokó z_0. Residuum oznaczamy $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

Fakt 8.2. *Jeli z_0 jest biegunem m-tego rzdu funkcji f, to*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \big((z-z_0)^m f(z) \big).$$

W szczególnoci dla bieguna rzdu 1 *mamy:*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Twierdzenie 8.3 (Twierdzenie o residuach)**.** *Niech U bdzie obszarem ograniczonym kawakami gadk krzyw Jordana γ i niech $z_1, \ldots, z_n \in U$. Niech f bdzie funkcj cig na $\overline{U} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ i holomorficzn na $U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Wtedy*

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) \right)$$

Fakt 8.4. *Jeli P, Q s funkcjami holomorficznymi w otoczeniu z_0 a Q ma w z_0 pojedyncze zero, to*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_0 \right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Zad. 8.1 Znajd osobliwoci poniszych funkcji i oblicz wartoci odpowiednich residuów:

a) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$; b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$; c) $f(z) = \frac{1}{e^{z^5}}$;

d) $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$; e) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$;

Zad. 8.2 Udowodnij, e jeeli f ma w z_0 biegun rzdu 1, to

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z).$$

Zad. 8.3 Oblicz caki:

a) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$; b) $\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{(1-z)^2}\,\mathrm{d}z$; c) $\int_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$;

d) $\int_{|z|=1} \frac{e^z+3}{\sin z}\,\mathrm{d}z$.

Zad. 8.4 Oblicz

$$\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z.$$

Zadania do samodzielnego rozwizania

Zad. dod. 8.1 Jedynymi osobliwociami funkcji f na paszczynie zespolonej s:

- biegun rzdu 1 w $z = -1$, $\operatorname{Res}(f, -1) = 1$;
- biegun rzdu 2 w $z = 2$, $\operatorname{Res}(f, 2) = 2$.

Ponadto wiadomo, e $f(0) = \frac{7}{4}$ oraz $f(1) = \frac{5}{2}$ oraz e f ma skoczon granic w nieskoczonoci. Znale $f(z)$.

Zad. dod. 8.2 Udowodni Fakt 8.4.

Zad. dod. 8.3 Oblicz $\operatorname{Res}(f, z_0)$, gdy:

a) $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$, $z_0 = 0$; b) $f(z) = \frac{z^2+3z-5}{z^3}$, $z_0 = 0$; c) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$;

d) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$, $z_0 = 0$; e) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $z_0 = 0$; f) $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$, $z_0 = 0$;

g) $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$, $z_0 = 0$; h) $f(z) = \frac{\sin z}{z^7}$, $z_0 = 0$; i) $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$, $z_0 = 0$;

j) $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$, $z_0 = 0$; k) $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^3-5)}$, $z_0 = 0$; l) $f(z) = \frac{(z^3-1)(z+2)}{(z^4-1)^2}$, $z_0 = 1$.

Zad. dod. 8.4 Znale punkty osobliwe i obliczy residua w tych punktach dla funkcji:

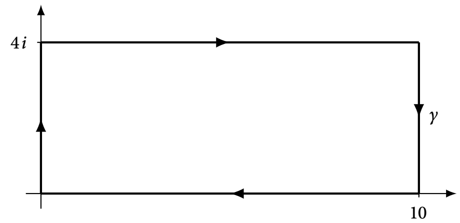
a) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$; b) $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$;

c) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$; d) $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$.

Zad. dod. 8.5 Oblicz caki:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$; b) $\int_{|z|=3} \operatorname{ctg} z\,\mathrm{d}z$; c) $\int_{|z|=15} \frac{z^2+1}{z-2}\,\mathrm{d}z$

Zad. dod. 8.6 Niech γ bdzie konturem jak na rysunku poniej (zwró uwag na orientacj):



Oblicz:

a) $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2-3z+5}$; b) $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+z+1}$; c) $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z+1}$;

d) $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+(i-3)z+4)(z^2-(8+4i)z+8i-3)}$.